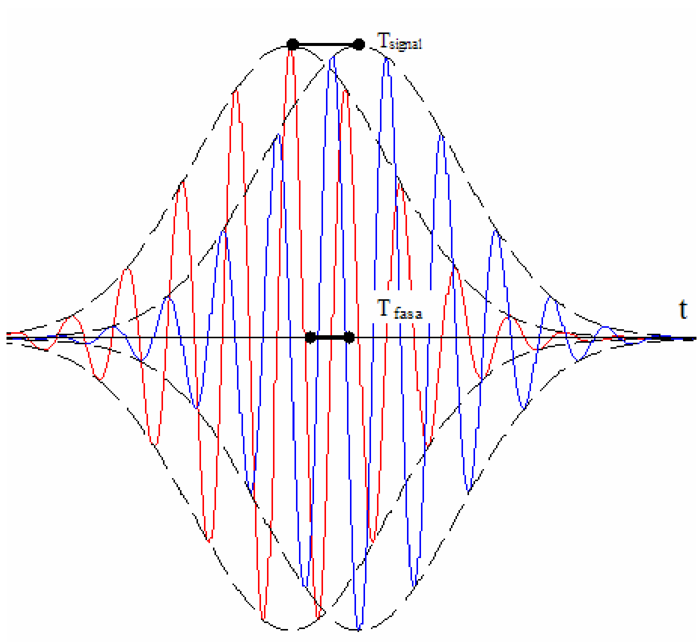
Fasuseinking og signalseinking

Magnus Danielsen



NVD*Rit* 2007:02

NÁTTÚRUVÍSINDADEILDIN Faculty of Science and Technology
FRÓÐSKAPARSETUR FØROYA University of the Faroe Islands

Heiti / Title **Fasuseinking og signalseinking**

Høvundar / Authors Magnus Danielsen

Ritslag / Report Type *Tøknifrágreiðing/Technical Report*

NVD*Rit* 2007:02

ISSN 1601-9741
Útgevari / Publisher Náttúruvísindadeildin, Fróðskaparsetur Føroya
Bústaður / Address Nóatún 3, FO 100 Tórshavn, Føroyar (Faroe Islands)
Postrúm / P.O. box 2109, FO 165 Argir, Føroyar (Faroe Islands)
☎ • 🖷 • @ +298 352550 • +298 352551 • nvd@setur.fo

Abstract:

English:

Phase delay and group delay
Phase delay and group delay (signal delay) are derived for a pulse modulated carrier signal. Useful formulas for the phase and group delays are derived for general transfer functions for linear systems both for analogue and discrete signals, using Fourier transform, Laplace transform, z-transform, and bilinear transform formulation for digital filters.

Fasuseinking og signalseinking
Fasuseinking og signalseinking (group delay) eru viðgjørd við støði í pulsmoduleraðum beribylgjusignali ella signalpakka, ið inniheldur frekvensir, sum gruppera seg rundan um ein senturfrekvens. Formlar fyri fasu- og signalseinking eru funnir fyri generella yvirføringsfunktión fyri linjurættar skipanir. Úrslit eru bæði fyri analog og diskret signal við brúk av Fourier transformión, Laplace transformatión, z-transformatión og tvílinjurættari transformatión, ið verður brúkt til digital filtur.

Innihald:

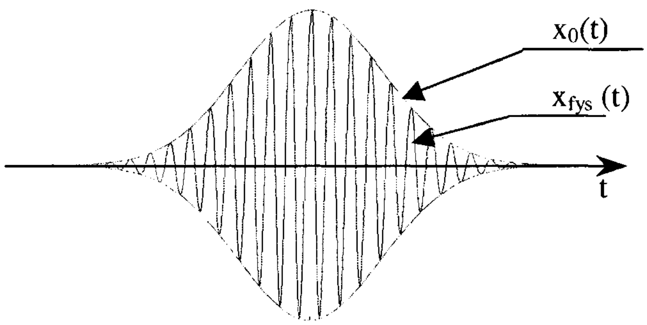
Fasuseinking (phase delay) og signalseinking (group delay).

Magnus Danielsen

1. Útleiðing av fasu- og signalseinking fyri signalpakka

Eitt signal x(t) er ein signalpakki, um signalið inniheldur frekvensir, sum gruppera seg rundan um ein senturfrekvens $f_0 = \omega_0/(2\pi)$.

Eitt fysiskt signal er altíð reelt. Soleiðis vil ein fysiskur signalpakki kunna verða skrivaður til dømis sum $x_{fys}(t) = x_0(t)\cdot\cos(\omega_0 t)$ og verða avmyndaður sum mynd 1 vísir, har x(t) er sjálvt signalið, og $x_0(t)$ er "envelope" til signalið. Í mongum førum vil tað fysiska signalið kunna verða viðgjørt sum eitt komplext signal x(t), og síðan verða tulkað fysiskt við at taka realpartin av tí, t.e. $x_{fys}(t) = \mathrm{Re}[x(t)]$.



Mynd 1

Signalpakkin kann tí verða skrivaður í kompleksa forminum

(1.1) $$x(t) = x_0(t)\cdot\exp(j\omega_0 t)$$

har $x_0(t)$ er eitt reelt signal, hvørs Fouriertransformur $X_0(\omega)$ bert inniheldur frekvensir nógv lægri enn ω_0. Signalpakkin x(t) hevur Fouriertransformin

(1.2) $$X(\omega) = X_0(\omega - \omega_0)$$

Verður hetta signalið sent gjøgnum eina skipan við yvirføringsfunktiónini

(1.3) $$H(\omega) = H_0 \cdot \exp(j\,\psi(\omega))$$

har vit kunnu seta H_0 = konstant í tí frekvensbandinum, vit viðgera, og approximera $\psi(\omega)$ í nánd av $\omega = \omega_0$ við tveimum teimum fyrstu liðunum í Taylorraðnum

(1.4) $$\psi(\omega) \cong \psi_0 + d\psi/d\omega|_{\omega=\omega_0} \cdot (\omega - \omega_0) = \psi_0 + \psi_0' \cdot (\omega - \omega_0)$$

verður Fouriertransformurin av tí transmitteraða signalinum

$$
\begin{aligned}
(1.5)\qquad Y(\omega) &= H_0 \cdot \exp(j\,\psi(\omega)) \cdot X(\omega) \\
&= H_0 \cdot \exp(j\,(\psi_0 + \psi_0' \cdot (\omega - \omega_0)) \cdot X_0(\omega - \omega_0) \\
&= H_0 \cdot \exp(j\,(\psi_0 - \psi_0'\omega_0)) \cdot X_0(\omega - \omega_0) \cdot \exp(j\,\psi_0' \cdot \omega)
\end{aligned}
$$

Tilsvarandi tíðarfunktiónin í útsignalinum er

$$
\begin{aligned}
(1.6)\qquad y(t) &= H_0 \cdot \exp(j\,(\psi_0 - \psi_0'\omega_0)) \cdot x_0(t + \psi_0') \cdot \exp(j\omega_0(t + \psi_0')) \\
&= H_0 \cdot x_0(t + \psi_0') \cdot \exp(j\omega_0(t + \psi_0/\omega_0))
\end{aligned}
$$

Hetta svarar til tað fysiska signalið

$$(1.7)\qquad y_{fys}(t) = H_0 \cdot x_0(t + \psi_0') \cdot \cos(\omega_0(t + \psi_0/\omega_0))$$

Herav síggja vit, at *fasuseinkingin (phase delay)* er

$$(1.8)\qquad T_{ph} = -\,\psi_0/\omega_0$$

meðan *signalseinkingin (group delay)* er

$$(1.9)\qquad T_g = -\,\psi_0' = -\,d\psi/d\omega\big|_{\omega=\omega 0}$$

2. Fasa ψ og signalseinking T_g roknað út frá Fourier transforminum $H(j\omega)$.

Er yvirføringsfunktiónin givin sum ein Fouriertransformur $H(j\omega)$

$$(2.1)\qquad H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{j\psi(\omega)}$$

hava vit í parti 1 sæð, at signalseinkingin (group-delay) er givið við (1.9). Frá líkning (2.1) kunnu vit finna

$$
\begin{aligned}
& \ln[H(j\omega)] = \ln[|H(j\omega)|] + j\psi(j\omega) \\
(2.2)\qquad & \qquad = \tfrac{1}{2} \cdot \ln[H(j\omega)] + \tfrac{1}{2} \cdot \ln[H^*(j\omega)] + j\psi(\omega) \\
& \qquad = \tfrac{1}{2} \cdot \ln[H(j\omega)] + \tfrac{1}{2} \cdot \ln[H(-j\omega)] + j\psi(\omega)
\end{aligned}
$$

Harav finna vit fasuna

$$(2.3)\qquad \psi(\omega) = -\tfrac{1}{2} \cdot j \cdot \ln \frac{H(j\omega)}{H(-j\omega)}$$

og signalseinkingina

(2.4) $$T_g(\omega) = -\frac{d\psi(\omega)}{d\omega} = -\tfrac{1}{2}\frac{d}{d(j\omega)}\ln\frac{H(j\omega)}{H(-j\omega)}$$

3. Fasa ψ og signalseinking T_g roknað út frá Laplace transforminum H(s) fyri analog signal.

Vit vilja nú definera tað generaliseraðu fasuna $\psi(s)$ og generaliseraðu signalseinkingina $T_g(s)$ í Laplacetransform formulering við at skriva

(3.1) $$H(s) = |H(s)| \cdot \exp(\psi(s))$$

(3.2) $$T_g(s) = -\frac{d\psi(s)}{ds}$$

Við tað, at fasan $\psi(\omega)$ altíð er ein ólíka funktión av ω, fáa vit við brúk av (2.1) og (3.1), at sambandið millum generaliseraðu fasuna $\psi(s)$ og fasuna $\psi(\omega)$ er

(3.3) $$\psi(\omega) = -j\psi(s)\big|_{s=j\omega}$$

Saman við (2.3) gevur (3.3), at tann generaliseraða fasan er

(3.4) $$\psi(s) = \tfrac{1}{2} \cdot \ln\frac{H(s)}{H(-s)}$$

Tilsvarandi er sambandið millum generaliseraða signalseinking $T_g(s)$ og signalseinking $T_g(\omega)$

(3.5) $$T_g(\omega) = T_g(s)\big|_{s=j\omega} = -\frac{d\psi(s)}{ds}\bigg|_{s=j\omega}$$

Er H(s) givið sum lutfallið millum tvey polynomiir P(s) og Q(s), har hvørt av teimum er faktoriserað

(3.6) $$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = K\frac{(s-z_1)\cdot(s-z_2)\cdot....(s-z_M)}{(s-p_1)\cdot(s-p_2)\cdot....(s-p_N)} = K\frac{\prod_{i=1}^{M}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{N}(s-p_i)}$$

kunnu vit finna fylgjandi formlar fyri generaliseraðu signalseinkingina

$$
(3.7)\quad
\begin{aligned}
T_g(s) &= -\frac{d\psi(s)}{ds} \\
&= -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{d}{ds}\ln\frac{H(s)}{H(-s)} \\
&= -\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{H_s'(s)}{H(s)}+\frac{H_{-s}'(-s)}{H(-s)}\right) \\
&= -Ev\left(\frac{H_s'(s)}{H(s)}\right) \\
&= -\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{P_s'(s)}{P(s)}+\frac{P_{-s}'(-s)}{P(-s)}-\frac{Q_s'(s)}{Q(s)}-\frac{Q_{-s}'(-s)}{Q(-s)}\right) \\
&= -Ev\left(\frac{P_s'(s)}{P(s)}-\frac{Q_s'(s)}{Q(s)}\right)
\end{aligned}
$$

har Ev( ) er "even" (líka) parturin av funktiónini í parantesini.

Innseta vit faktoriseraðu polynomiini, fáa vit generaliseraðu signalseinkingina sum funktión av inngangandi pólum og nulpunktum:

$$
(3.8)\quad
\begin{aligned}
T_g(s) &= -\frac{d\psi(s)}{ds} \\
&= -\tfrac{1}{2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{s-z_i}+\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{-s-z_i}-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{s-p_i}-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{-s-p_i}\right) \\
&= -Ev\left(\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{s-z_i}-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{s-p_i}\right)
\end{aligned}
$$

4. Fasa ψ og signalseinking T_g roknað út frá Z-transforminum H(z) fyri digital signal.

Eitt digitalt filtur verður lýst við síni yvirføringsfunktión H(z). Fyri at finna frekvenskarakteristikkin verður sambandið millum z og ω lýst við

$$(4.1)\quad z = \exp(j\omega T)$$

ið gevur eindarsirkulin í z – planinum. T er samplingstíðin (samplingsfrekvensurin $f_s = 1/T$).

Yvirføringsfunktiónin H(z) gevur sostatt frekvenskarakteristikkin

$$(4.2)\quad H(e^{j\omega T}) = H(z)\big|_{z=\exp(j\omega T)} = \left|H(e^{j\omega T})\right|\cdot e^{j\psi(\omega)} = \sqrt{H(e^{j\omega T})H(e^{-j\omega T})}\cdot e^{j\psi(\omega)}$$

har $|H(e^{j\omega T})|$ er amplitudukarakteristikkurin, og $\psi(\omega)$ er fasukarakteristikkurin eins og, tá tað snúði seg um analog filtur. Signalseinkingin ("group delay") verður eins og áður funnin við formli (1.9), t.e.

$$(4.3)\quad T_g(\omega) = -\frac{d\psi(\omega)}{d\omega}$$

Vit vilja nú formliga definera tað generaliseraðu fasuna $\psi(z)$ út frá (4.2) við at seta z í staðin fyri $e^{j\omega T}$ og z^{-1} í staðin fyri $e^{-j\omega T}$

$$(4.4)\quad H(z) = \sqrt{H(z)H(z^{-1})}\cdot e^{\psi(z)}$$

Soleiðis síggja vit við samanburði av (4.2) og (4.4), at fasan verður

$$(4.5)\quad \psi(\omega) = -j\psi(z)\big|_{z=\exp(j\omega T)}$$

Úr formli (4.4) finna vit generaliseraðu fasuna

$$(4.6)\quad \psi(z) = \tfrac{1}{2}\cdot \ln\frac{H(z)}{H(z^{-1})}$$

Signalseinkingin verður nú funnin við tað, at, tá $z = \exp(j\omega T)$, er $dz/d\omega = jT\cdot\exp(j\omega T) = jTz$

$$(4.7)\quad \begin{aligned} T_g(\omega) &= -\frac{d\psi(\omega)}{d\omega} = j\frac{d\psi(z)}{dz}\frac{dz}{d\omega}\bigg|_{z=\exp(j\omega T)} \\ &= -Tz\frac{d\psi(z)}{dz}\bigg|_{z=\exp(j\omega T)} \end{aligned}$$

Út frá (4.7) kunnu vit definera generaliseraðu signalseinkingina $T_g(z)$ í z – transforminum

$$(4.8)\quad T_g(z) = -Tz\frac{d\psi(z)}{dz}$$

soleiðis at $T_g(\omega) = T_g(z)\big|_{z=\exp(j\omega T)}$

Er H(z) givin sum lutfallið millum tvey polynomiir P(z) og Q(z), har hvørt av teimum er faktoriserað sambært

$$(4.9)\qquad H(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=K\frac{(1-z_1z^{-1})\cdot(1-z_2z^{-1})\cdot....(1-z_Mz^{-1})}{(1-p_1z^{-1})\cdot(1-p_2z^{-1})\cdot....(1-p_Nz^{-1})}=K\frac{\prod_{i=1}^{M}(1-z_iz^{-1})}{\prod_{i=1}^{N}(1-p_iz^{-1})}$$

kunnu vit út frá (4.6), (4.7), (4.8) og (4.9) finna hesar formlarnar fyri $T_g(z)$

$$
\begin{aligned}
T_g(z) &= -Tz\frac{d\psi(z)}{dz}\\
&= -\frac{1}{2}Tz\frac{d}{dz}\ln\frac{H(z)}{H(z^{-1})}\\
(4.10)\qquad &= -\frac{1}{2}T\left[z\frac{H_z'(z)}{H(z)}+z^{-1}\frac{H_{z^{-1}}'(z^{-1})}{H(z^{-1})}\right]\\
&= -\frac{1}{2}T\left[z\frac{P_z'(z)}{P(z)}-z\frac{Q_z'(z)}{Q(z)}+z^{-1}\frac{P_{z^{-1}}'(z^{-1})}{P(z^{-1})}-z^{-1}\frac{Q_{z^{-1}}'(z^{-1})}{Q(z^{-1})}\right]\\
&= -\frac{1}{2}T\left[z\sum_{i=1}^{M}\frac{z_i}{1-z_iz^{-1}}-z\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i}{1-p_iz^{-1}}+z^{-1}\sum_{i=1}^{M}\frac{z_i}{1-z_iz}-z^{-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i}{1-p_iz}\right]
\end{aligned}
$$

5. Fasa ψ og signalseinking T_g roknað út frá λ transforminum $H(\lambda)$ fyri digital signal.

Í samband við gerð av digitalum filtrum verður ein bilinier transformatión brúkt, definerað við

$$(5.1)\qquad \lambda=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=\frac{z-1}{z+1}\qquad \text{og}\qquad z=\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$$

Hetta gevur okkum eisini samband við Laplacetransformin við tað at $z = \exp(sT)$ gevur $\lambda = \tanh(sT)$. Hervið fær filtrið yvirføringsfunktiónina definerað við nýggja variablinum λ

$$(5.2)\qquad H(\lambda)=H(z)\Big|_{z=\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}$$

Við tað, at resiprokka virðið av z sambært (5.1) svarar til forteknsbroyting í λ-økinum verður

$$\psi(\lambda) = \tfrac{1}{2}\cdot \ln \frac{H(z)}{H(z^{-1})}\bigg|_{z=\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} = \tfrac{1}{2}\cdot \ln \frac{H(\lambda)}{H(-\lambda)} \tag{5.3}$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot \ln \frac{H(\lambda)}{H(-\lambda)} = \tfrac{1}{2}\cdot [\ln H(\lambda) - \ln H(-\lambda)]$$

Innseting av $z = \dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}$ í H(z) gevur

$$H(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} \tag{5.4}$$

har $P(\lambda)$ og $Q(\lambda)$ eru tvey nýggj polynomiir í λ. Generaliseraða signalseinkingin verður nú roknað við brúk av $H(\lambda)$

$$T_g(\lambda) = T_g(z)\Big|_{z=\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} = -Tz = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\frac{d\psi(\lambda)}{d\lambda}\frac{1}{dz/d\lambda} \tag{5.5}$$
$$= -\frac{T}{2}(1-\lambda^2)\frac{d\psi(\lambda)}{d\lambda}$$

Innseta vit (5.3) og (5.4) í (5.5) finna vit hesar formlar fyri generaliseraðu signalseingingina í λ-økinum

$$T_g(\lambda) = -\frac{T}{2}(1-\lambda^2)\frac{d\psi(\lambda)}{d\lambda}$$
$$= -\frac{T}{2}(1-\lambda^2)\frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}[\ln H(\lambda) - \ln H(-\lambda)]$$
$$= -\frac{T}{4}(1-\lambda^2)\left[\frac{H'_\lambda(\lambda)}{H(\lambda)} + \frac{H'_{-\lambda}(-\lambda)}{H(-\lambda)}\right]$$
$$= -\frac{T}{2}(1-\lambda^2)\mathrm{Ev}\left[\frac{H'_\lambda(\lambda)}{H(\lambda)}\right] \tag{5.6}$$
$$= -\frac{T}{4}(1-\lambda^2)\left[\frac{P'_\lambda(\lambda)}{P(\lambda)} + \frac{P'_{-\lambda}(-\lambda)}{P(-\lambda)} - \frac{Q'_\lambda(\lambda)}{Q(\lambda)} - \frac{Q'_{-\lambda}(-\lambda)}{Q(-\lambda)}\right]$$
$$= -\frac{T}{2}(1-\lambda^2)\mathrm{Ev}\left[\frac{P'_\lambda(\lambda)}{P(\lambda)} - \frac{Q'_\lambda(\lambda)}{Q(\lambda)}\right]$$

Ta veruligu (fysisku) signalseinkingina $T_g(\omega)$ finna vit við at innseta

$$\lambda = \tanh(j\omega T) = j\cdot \tan(\omega T) \tag{5.7}$$